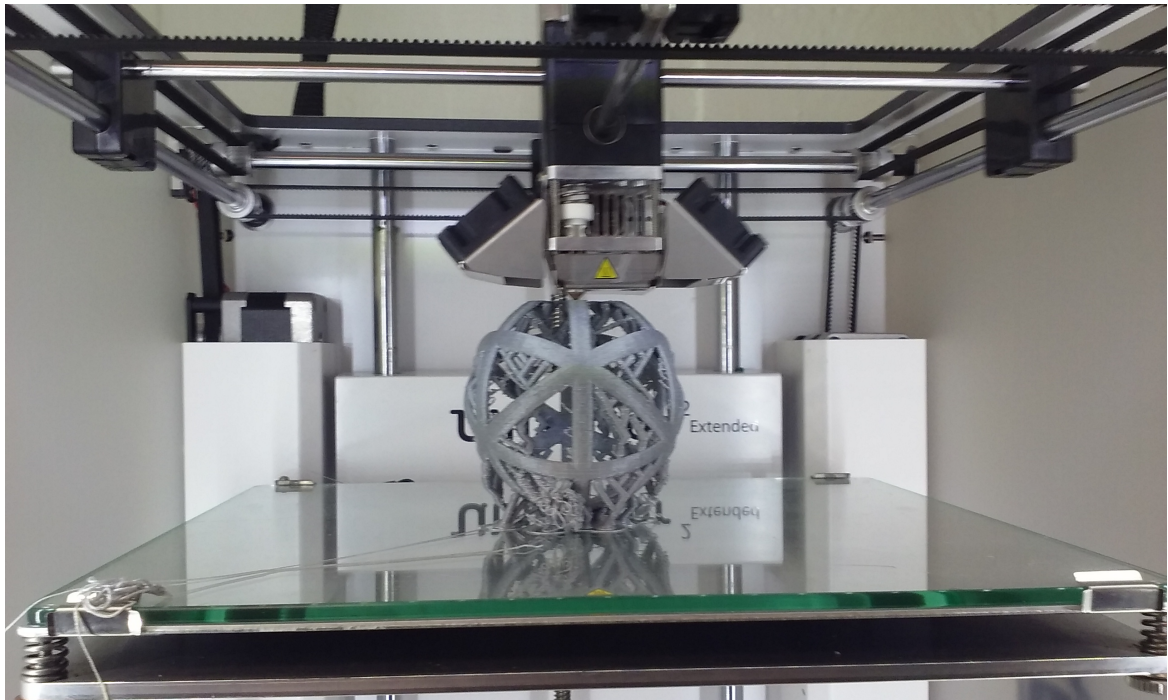


ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE RENNES

RAPPORT DE STAGE 1A

Groupes de Coxeter, Pavages



Octave LACOURTE

Maître de stage : François DAHMANI

26 Mai 2015 — 26 Juin 2015

Table des matières

1	Le plan hyperbolique	3
1.1	Définitions	3
1.1.1	Le demi-plan de Poincaré	3
1.1.2	Le disque de Poincaré	4
1.2	Applications conformes de \mathbb{H}^2	4
1.3	Propriétés des transformations de Möbius	6
1.4	Géodésiques de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$	6
2	L'arbre modulaire	9
2.1	Théorie	9
2.2	Visualisation	12
3	Pavages	13
3.1	Théorie	13
3.2	Pavages de la sphère	16
4	Annexes	20
4.1	Arbre modulaire	20
4.2	Modélisation 3D du pavage associé au tétraèdre	23
5	Bibliographie	24

Préface

J'ai effectué un stage du 26 mai 2015 au 26 juin 2015 sur les groupes de Coxeter et les pavages sous la tutelle de François Dahmani à l'Institut Fourier.

Cet Institut est le laboratoire de mathématiques fondamentales de Grenoble. Il comprend une soixantaine de chercheurs dans différents thèmes des mathématiques comme l'algèbre et géométrie, la théorie des nombres, les probabilités, la topologie, la géométrie différentielle et Riemannienne... Parmi ces chercheurs on trouve des enseignants chercheurs mais aussi des chercheurs du CNRS, des membres de l'Institut Universitaire de France ainsi qu'un membre de l'Académie des sciences (Jean-Pierre Demailly) Il contient également une bibliothèque, une salle commune ainsi qu'une cafétéria.

Mon encadrant François Dahmani travaille en géométrie et topologie, théorie géométrique des groupes. Je l'ai vu deux fois deux heures par semaine. Pendant mon stage j'ai été amené à rencontrer Greg Mcshane qui travaille en géométrie hyperbolique des surfaces et des variétés de dimension 3. Il m'a conseillé l'utilisation du FabLab du campus de Grenoble (fabMSTIC) où j'ai rencontré Jérôme Maisonasse.

J'ai étudié les groupes de Coxeter et les groupes de réflexions. Mais aussi créé des pavages que se soit sur la sphère, sur le plan euclidien ou sur le plan hyperbolique. Très rapidement on s'est aperçu que la modélisation des pavages serait beaucoup plus aisée si on avait une modélisation 3D. C'est grâce au Fablab et à Jérôme Maisonasse qui m'a donné les moyens de créer un fichier pouvant être lu par une imprimante 3D et d'utiliser une imprimante 3D.

Je remercie toute les personnes qui m'ont accueilli et que j'ai rencontré. En particulier François Dahmani, Greg Mcshane et Jérôme Maisonasse.

1 Le plan hyperbolique

La majorité des preuves non écrites le sont dans le livre Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann d'Eric Toubiana et Ricardo Sa Earp.

1.1 Définitions

Il existe deux modèles de plan hyperbolique. Ces deux modèles sont liés par un difféomorphisme conforme, c'est pourquoi nous ne nous attarderons pas sur le deuxième modèle.

1.1.1 Le demi-plan de Poincaré

On appelle plan hyperbolique \mathbb{H}^2 l'ensemble défini par :

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$$

L'axe réel et le point à l'infini ∞ constituent le bord à l'infini de \mathbb{H}^2 , on le note $\partial_\infty \mathbb{H}^2$.

En notant pour tout point $z_0 \in \mathbb{H}^2$, $T_{z_0} \mathbb{H}^2$ l'espace tangent de \mathbb{H}^2 en z_0 , on définit un produit scalaire en ces points par :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in T_{z_0} \mathbb{H}^2, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\text{Im}(z_0)^2}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^2 .

On a alors une norme sur \mathbb{H}^2 , appelée norme hyperbolique :

$$\forall \vec{u} \in T_{z_0} \mathbb{H}, \|\vec{u}\|_{\mathbb{H}} = \frac{\|\vec{u}\|}{\text{Im}(z_0)}$$

Ainsi qu'une métrique hyperbolique notée $g_{\mathbb{H}} : g_{\mathbb{H}}(\vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{H}}$

On appelle demi plan de Poincaré $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$.

On peut définir l'angle orienté. Soient $z_0 \in \mathbb{H}^2$, $\vec{u}, \vec{v} \in T_{z_0} \mathbb{H}^2$. L'angle orienté $L(\vec{u}, \vec{v}) \in]-\pi, \pi]$ est défini par : $\cos(L(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}} \|\vec{v}\|_{\mathbb{H}}}$.

On remarque que cet angle est le même que l'angle mesuré avec la métrique euclidienne.

Soient $U, V \subset \mathbb{C}$ ouverts. On dit qu'une application $f : U \rightarrow V$ est une application conforme si elle préserve les angles ainsi que leur orientation.

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ une courbe C^1 par morceaux (un chemin), $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

On définit la longueur hyperbolique :

$$L_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_a^b g_{\mathbb{H}}(\gamma'(t), \gamma'(t))^{1/2} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$$

Remarque : calculons la longueur hyperbolique d'un chemin vertical entre $(x, y1)$ et $(x, y2)$: $\gamma(t) = (x, y1 + t(y2 - y1))$, $t \in [0, 1]$, $y1 \leq y2$ on a alors $\gamma'(t) = (0, y2 - y1)$.

D'où

$$L_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_0^1 \frac{|y2 - y1|}{y1 + t(y2 - y1)} dt = |\log(y2) - \log(y1)|$$

1.1.2 Le disque de Poincaré

Soit $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C}, |w| < 1\}$ le disque unité ouvert.

Le bord de \mathbb{D} est appelé bord à l'infini : $\partial_\infty \mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C}, |w| = 1\}$.

On considère l'application ϕ telle que $\phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Cette application est un difféomorphisme conforme de \mathbb{H}^2 dans \mathbb{D} . Pour pouvoir passer d'un modèle à l'autre par cette application nous allons munir \mathbb{D} d'une métrique $g_{\mathbb{D}}$ telle que ϕ soit une isométrie entre $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ et $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$.

Supposons qu'un tel $g_{\mathbb{D}}$ existe. On a alors pour tout w dans \mathbb{D} et pour tout \vec{a}, \vec{b} dans $T_w \mathbb{D}$:

$$g_{\mathbb{D}}(\vec{a}, \vec{b}) = g_{\mathbb{H}}(D_w \phi^{-1}(\vec{a}), D_w \phi^{-1}(\vec{b})) = \frac{\langle D_w \phi^{-1}(\vec{a}), D_w \phi^{-1}(\vec{b}) \rangle}{\text{Im}(\phi^{-1}(w))^2} = \frac{|(\phi^{-1})'(w)|^2}{\text{Im}(\phi^{-1}(w))^2} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

D'où $g_{\mathbb{D}}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{4 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{(1 - |w|^2)^2}$.

On montre ainsi l'existence et l'unicité d'une telle métrique.

1.2 Applications conformes de \mathbb{H}^2

Dans cette partie nous allons démontrer que l'ensemble des isométries de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ est :

$$I_{\mathbb{H}} = \left\{ z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}; z \rightarrow \frac{-a\bar{z}+b}{-c\bar{z}+d}, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, ad - bc = 1 \right\}.$$

Lemme 1.1. Soient $U, V \subset \mathbb{C}$ deux parties ouvertes de \mathbb{C} et soit $f : U \rightarrow V$ une application.

On a l'équivalence suivante :

f est conforme $\Leftrightarrow f$ est holomorphe et $\forall z \in U, f'(z) \neq 0$

Démonstration.

On note $f(z) = P(z) + iQ(z)$ et $z = x + iy$.

\Rightarrow

Supposons f conforme. Ainsi pour tout z dans U , $D_z f$ est une application linéaire conforme.

On note $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$.

On considère la rotation r d'angle θ telle que $r(D_z f(e_1)) = m e_1, m > 0$.

On a toujours $r \circ D_z f$ conforme. Ainsi $r(D_z f(e_2)) = m e_1$ donc $r \circ D_z f$ est une homothétie de rapport m .

Donc $\forall \vec{u} = (a, b) \in \mathbb{R}^2, D_z f(\vec{u}) = m L^{-1}(\vec{u}) = m(\cos(\theta)a - \sin(\theta)b, \sin(\theta)a + \cos(\theta)b)$.

Or $D_z f(\vec{u}) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}(z).a + \frac{\partial P}{\partial y}(z).b, \frac{\partial Q}{\partial x}(z).a + \frac{\partial Q}{\partial y}(z).b \right)$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(z) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(z) = m \cos(\theta) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(z) &= -\frac{\partial Q}{\partial x}(z) = m \sin(\theta) \end{aligned}$$

Donc f vérifie les relations de Cauchy-Riemann, donc f est holomorphe. De plus on remarque que l'on a $D_z f(\vec{u}) = f'(z) \cdot \vec{u}$. Donc $\forall z \in U, f'(z) \neq 0$.

\Leftarrow

Supposons f holomorphe et $\forall z \in U, f'(z) \neq 0$.

On a $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2, D_z f(\vec{u}) = f'(z) \cdot \vec{u}$. On a donc la composition d'une rotation d'angle $\arg(f'(z))$

et d'une homothétie de rapport $\|f'(z)\|$. Ces application étant conforme on en déduit que $D_z f$ est conforme donc f est conforme. \square

Pour la preuve du résultat suivant, voir le livre d'Eric Toubiana.

Proposition 1.2. *Les transformations conformes du disque unité ouvert \mathbb{D} est :*

$$M_{\mathbb{D}} = \left\{ z \rightarrow \lambda \cdot \frac{z - z_0}{z\bar{z}_0 - 1}, \lambda, z_0 \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, |z_0| < 1 \right\}$$

Corollaire 1.3. *On a : $M_{\mathbb{D}} = \left\{ z \rightarrow \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, a, c \in \mathbb{C}, a\bar{a} - \bar{c}c = 1 \right\}$*

Démonstration.

$$\text{Soit } f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - z_0}{z\bar{z}_0 - 1} = \frac{e^{i\theta/2} \cdot z - e^{i\theta/2} \cdot z_0}{ze^{-i\theta/2} \cdot \bar{z}_0 - e^{-i\theta/2}}$$

Il suffit de poser $\delta = -1 + |z_0|^2$, ainsi $\delta < 0$. Enfin on pose $a = \frac{e^{i\theta/2}}{i\sqrt{-\delta}}, c = \frac{e^{-i\theta/2}}{i\sqrt{-\delta}}$ \square

On montre alors le résultat suivant :

Théorème 1.4. $M_{\mathbb{H}} = \left\{ z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, ad - bc = 1 \right\}$.

Démonstration.

\supset ok.

\subset

Soit f une transformation conforme de \mathbb{H}^2 . Comme $\phi(z) = \frac{z - i}{z + i}$ est un difféomorphisme conforme de \mathbb{H}^2 sur \mathbb{D} . On a alors $F = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ qui est une transformation conforme de \mathbb{D} .

Ainsi $F(z) = \frac{uz + \bar{v}}{vz + \bar{u}}$ où $u, v \in \mathbb{C}, u\bar{u} - v\bar{v} = 1$. Par le calcul on obtient alors f de la forme voulu,

$$a = \Re(u) + \Re(v)$$

$$\text{où : } b = \Im(u) + \Im(v)$$

$$c = \Im(v) - \Im(u)$$

$$d = \Re(v) - \Re(u)$$

\square

Remarques :

* La condition $ad - bc = 1$ sur les transformation conforme n'est pas une restriction.

En effet, on pose $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, si $\delta = ad - bc > 0$ il suffit de prendre $x' = x/\sqrt{\delta}$ pour x décrivant a, b, c, d . On obtient alors la relation $a'd' - b'c' = 1$ et f est inchangée.

De même si $\delta < 0$ on divise les coefficients par $i\sqrt{-\delta}$

* Les transformations suivantes sont appelées transformations de Möbius :

$$\left\{ z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

Proposition 1.5. *Toute transformation conforme de \mathbb{H}^2 est une isométrie de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$*

Démonstration.

Soit f une transformation conforme de \mathbb{H}^2 . Donc il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$ tels que

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Soient $z \in \mathbb{H}^2, z = x + iy, \vec{u}, \vec{v} \in T_z \mathbb{H}^2$

Montrons que $g_{\mathbb{H}}(D_z f(\vec{u}), D_z f(\vec{v})) = g_{\mathbb{H}}(\vec{u}, \vec{v})$

Comme f est conforme alors f est holomorphe et $f'(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{H}^2$. Ainsi $D_z f(\vec{u}) = f'(z)(\vec{u})$.

$$\text{Remarque : } \text{Im}(f(z)) = \frac{\text{Im}((ax + b + ayi)(cx + d - cyi))}{|cz + d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

$$\text{D'où } \frac{|f'(z)|}{\text{Im}(f(z))} = \frac{|a(cz + d) - c(ax + b)|}{|cz + d|^2} \cdot \frac{|cz + d|^2}{\text{Im}(z)} = \frac{1}{\text{Im}(z)}.$$

On a alors :

$$g_{\mathbb{H}}(D_z f(\vec{u}), D_z f(\vec{v})) = \frac{(f'(z)(\vec{u}), f'(z)(\vec{v}))}{\text{Im}(f(z))^2} = \frac{|f'(z)|^2}{\text{Im}(f(z))^2} \cdot (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{\text{Im}(z)^2} = g_{\mathbb{H}}(\vec{u}, \vec{v})$$

Donc f est une isométrie de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$

□

Remarques :

* Ces transformations sont des isométries positives, et de plus on a que toute isométrie positive est conforme, ce qui montre l'autre inclusion.

* L'application $h : z \rightarrow -\bar{z}$ est une isométrie négative. Ainsi pour obtenir toutes les isométries négatives il suffit de composer les isométries positives par h .

Tout ceci démontre le théorème voulu :

Théorème 1.6. *l'ensemble des isométries de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ est :*

$$I_{\mathbb{H}} = \left\{ z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}; z \rightarrow \frac{-a\bar{z} + b}{-c\bar{z} + d}, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, ad - bc = 1 \right\}.$$

1.3 Propriétés des transformations de Möbius

Les preuves de cette sous-parties sont traitées dans le livre d'Eric Toubiana. On note $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Proposition 1.7. *Tout transformation de Möbius envoie les cercles ou les droites de $\bar{\mathbb{C}}$ sur d'autres cercles ou droites de $\bar{\mathbb{C}}$.*

Proposition 1.8. *Toute transformation de Möbius de $\bar{\mathbb{C}}$ possède au moins un point fixe. La seule possédant trois points fixe ou plus est l'identité.*

Proposition 1.9. *Pour tout $(a, b, c), (u, v, w) \in \bar{\mathbb{C}}$ deux triplets de points distincts, il existe une unique transformation de Möbius envoyant a, b, c sur u, v, w respectivement.*

1.4 Géodésiques de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$

Une géodésique sur \mathbb{H}^2 est une courbe $c :]a, b[\rightarrow \mathbb{H}^2, C^1$ par morceau, qui minimise la distance entre deux points p et q quelconques de $c(]a, b[)$. On note alors cette distance minimale $d_{\mathbb{H}}(p, q)$.

Lemme 1.10.

1. Les demi-droites verticales de la forme $\phi(t) = x_0 + it, t \in]0, +\infty[, x_0 \in \mathbb{R}$ sont des géodésiques de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$.

2. Pour deux points $p, q \in \mathbb{H}^2$ situés sur la même demi-droite verticale D , D est la seule géodésique passant par p et q . De plus

$$d_{\mathbb{H}}(p, q) = |\log(\operatorname{Im}(p)) - \log(\operatorname{Im}(q))|$$

Démonstration.

On a déjà montré que pour deux points p, q sur une courbe verticale de la forme $\phi(t) = x_0 + it, t \in]0, +\infty[, x_0 \in \mathbb{R}$, on a $L_{\mathbb{H}}(p, q) = |\log(\Im(p)) - \log(\Im(q))|$. Soit c une courbe C^1 par morceau quelconque reliant p et q :

$$c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2, c(t) = x(t) + iy(t); c(0) = p, c(1) = q$$

On a alors :

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(c) &= \int_0^1 \frac{|c'(t)|}{\operatorname{Im}(c(t))} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\ &\geq \left| \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right| \\ &= |\log(y(1)) - \log(y(0))| \\ &= |\log(\operatorname{Im}(q)) - \log(\operatorname{Im}(p))| = L_{\mathbb{H}}(\phi)[p, q] \end{aligned}$$

Ainsi le point 1 est démontré.

Pour le point 2 il suffit de montrer l'unicité. Si c est une autre géodésique, alors les inégalité précédentes sont des égalités. Ainsi on en déduit que la composante x de c est constante. Comme c et ϕ passe par le point p , alors $c = \phi$

□

Remarque : Comme les isométries conservent les distances, l'image d'une géodésique par une isométrie est une géodésique.

Lemme 1.11. Les demi-cercles orthogonaux à l'axe réel sont des géodésiques de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}, R > 0$ et C le demi cercle de centre x et de rayon R . On va montrer que C est l'image par une isométrie d'une droite verticale. Soit L la demi-droite verticale passant par $(x_0 - R)$ et C' le demi-cercle de centre $(x_0 + R)$ et de rayon $2R$.

$I_{C'} = \frac{R^2}{\bar{z} - x_0}$ est l'inversion par rapport au cercle C' . C'est une isométrie négative, et on a $I_{C'}(L) = C$.

On a alors C qui est une géodésique car L en est une.

□

Théorème 1.12. Il n'existe qu'une seule géodésique entre deux points de \mathbb{H}^2 . De plus les seules géodésiques de \mathbb{H}^2 sont les demi-droites verticales et les demi-cercles orthogonaux à l'axe réel.

Démonstration. Soient $p, q \in \mathbb{H}^2, p \neq q$. Le cas où ils se situent sur une même droite verticale à déjà été traité.

Supposons qu'ils ne sont pas alignés verticalement. En notant x_0 l'intersection de la médiatrice du segment $[pq]$ avec l'axe réel. On obtient alors l'existence d'un demi-cercle C de centre x_0 et passant par p et q , on note R le rayon de ce demi-cercle. Par le lemme précédent c'est une

géodésique.

Soit D une géodésique passant par p et q . On reprend la construction de la droite L précédente. On a alors $L = I_{C'}^{-1}(C)$. De plus Comme la géodésique D passe aussi par les points p et q , alors $I_{C'}^{-1}(D)$ passe par les points $I_{C'}^{-1}(p), I_{C'}^{-1}(q)$ qui se situent sur la droite verticale L . Ainsi $I_{C'}^{-1}(D) = L$. On en déduit que $D = C$. \square

2 L'arbre modulaire

Nous allons étudier ici l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur \mathbb{H}^2 .

2.1 Théorie

Lemme 2.1. $PSL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Démonstration.

Soit $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ une matrice de $PSL_2(\mathbb{Z})$ (on a alors $a_1b_2 - a_2b_1 = 1$ et donc a_1 et a_2 sont premiers entre eux). On note $\lfloor \cdot \rfloor$ sa fonction associée. On applique alors l'algorithme suivant :

$$\frac{a_1z + b_1}{a_2z + b_2} = \frac{\lfloor \frac{a_1}{a_2} \rfloor (a_2z + b_2) - ((\lfloor \frac{a_1}{a_2} \rfloor a_2 - a_1)z + (\lfloor \frac{a_1}{a_2} \rfloor b_2 - b_1))}{a_2z + b_2} = \lfloor \frac{a_1}{a_2} \rfloor - \frac{a_3z + b_3}{a_2z + b_2}.$$

$$\text{où } a_3 = \lfloor \frac{a_1}{a_2} \rfloor a_2 - a_1 \text{ et } b_3 = \lfloor \frac{a_1}{a_2} \rfloor b_2 - b_1$$

Si $a_3 = 0$ on s'arrête.

Sinon on note le résultat sous la forme $\lfloor \frac{a_1}{a_2} \rfloor - \frac{1}{\frac{a_2z + b_2}{a_3z + b_3}}$. et on recommence sur la nouvelle

fraction obtenu au dénominateur.

Cette algorithme termine car on remarque que l'on effectue en réalité l'algorithme d'Euclide sur les coefficients a_i .

De plus à chaque étape on peut écrire la matrice comme il suit :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\lfloor \frac{a_1}{a_2} \rfloor} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

Il suffit alors de regarder la dernière matrice pour conclure.

On se place alors sur la dernière étape de l'algorithme :

$$a_nz + b_n = \lfloor \frac{a_n}{a_{n+1}} \rfloor (a_{n+1}z + b_{n+1}) - (a_{n+2}z + b_{n+2})$$

Comme c'est l'étape où l'algorithme se termine alors : $a_{n+2} = \lfloor \frac{a_n}{a_{n+1}} \rfloor a_{n+1} - a_n = 0$.

D'où $a_{n+1} | a_n$.

On a aussi :

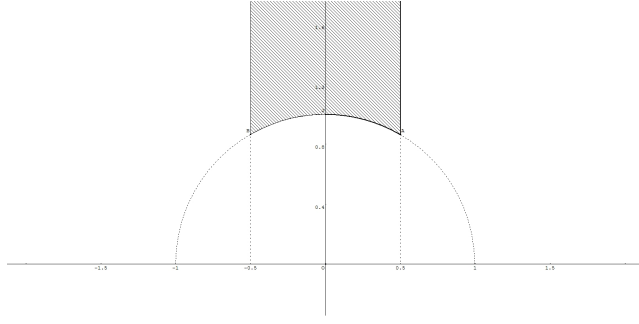
$$b_{n+2} = \lfloor \frac{a_n}{a_{n+1}} \rfloor b_{n+1} - b_n = \frac{a_n b_{n+1} - b_n a_{n+1}}{a_{n+1}}$$

Or de part la définition de a_{n+1} et b_{n+1} on a que $a_n b_{n+1} - b_n a_{n+1} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$ et $a_{n+1} = \text{pgcd}(a_{n+1}, a_n) = \text{pgcd}(a_1, a_2) = 1$ car on applique l'algorithme d'Euclide sur les a_i .

Donc la dernière matrice obtenu est celle de $\frac{1}{z + b_{n+1}}$ qui est $\begin{pmatrix} 1 & b_{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{b_{n+1}}$ \square

On note \mathbb{M} l'ensemble suivant :

$$\mathbb{M} = \{z \mid 1 < |z|, -\frac{1}{2} < \text{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\} \cup \{e^{i\alpha} \mid \frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\}$$



Théorème 2.2. *L'ensemble \mathbb{M} est un domaine fondamentale pour l'action du groupe $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur \mathbb{H}^2 . C'est à dire que tout point de \mathbb{H}^2 est équivalent à un point de \mathbb{M} et que deux points distincts de \mathbb{M} ne sont pas équivalents.*

Démonstration.

* Montrons que tout point de \mathbb{H}^2 est équivalent à un point de \mathbb{M} .

Soit $z_0 \in \mathbb{H}^2$

On considère $A = \{u = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\}$.

On a alors pour tout $u \in A$, $Im(u) = \frac{Im(z)}{|cz + d|^2}$.

On sait que l'inégalité $|cz + d|^2 \leq 1$ est réalisé pour un nombre fini de $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$. On peut donc définir $u_m \in A$ telle que $Im(u_m) = \max \{Im(u), u \in A\}$. On note a, b, c, d les coefficients associés à u_m . $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient bien à $PSL_2(\mathbb{Z})$.

On sait que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ conserve la partie imaginaire, et décale la partie réelle de k .

Ainsi $\exists u' \in A$, $Re(u') \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$, $Im(u') = Im(u_m)$.

Il reste à montrer que $|u'| \geq 1$.

Comme $u' \in A$ alors $\frac{1}{u'} \in A$. D'où $Im(u') \geq Im(\frac{1}{u'})$.

Or $\frac{1}{u'} = \frac{\bar{u}'}{|u'|^2}$ donc $Im(\frac{1}{u'}) = Im(\frac{\bar{u}'}{|u'|^2}) = \frac{Im(\bar{u}')}{|u'|^2}$. D'où $|u'|^2 = \frac{Im(u')}{Im(\frac{1}{u'})} \geq 1$.

Remarque : Si $u' = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]\frac{\Pi}{2}, \frac{2\Pi}{3}]$ alors $\frac{-1}{u'} = -e^{-i\theta} \in \mathbb{M}$.

* Montrons que deux points de \mathbb{M} ne sont pas équivalents.

Soient $z, z' \in \mathbb{M}$, supposons que $\exists P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z})$ telle que $Pz = z'$.

. Si $c = 0$ alors $ad = 1$ donc $a = d = 1$ ou -1 . Sans perdre de généralité supposons les égaux à 1

Ainsi $z' = z + b$ donc $Re(z') = Re(z) + b$. Or $z \in \mathbb{M}$ donc $Re(z) \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Donc $Re(z') \in]\frac{-1}{2} + b, \frac{1}{2} + b]$ mais $z' \in \mathbb{M}$ d'où $b = 0$.

Ainsi $z = z'$.

. Si $c \neq 0$. On a $(cz' - a)(cz + d) = cz'(cz + d) - a(cz + d) = c(az + b) - a(cz + d) = cb - ad = -1$.

D'où $|(z' - \frac{a}{c})|(z + \frac{d}{c})| = \frac{1}{c^2}$.

Or les deux termes de gauches sont plus grands que leur partie imaginaires donc plus grands que $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc on a $|c| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. D'où $c = 1$ ou -1 . Donc $|(z' - \frac{a}{c})|(z + \frac{d}{c})| = 1$

Or $\forall u \in \mathbb{M} \forall k \in \mathbb{Z}, |u + k| \geq 1$ et $|u + k| = 1 \Leftrightarrow k = -1$ ou $k = 0$.

On obtient alors qu'un nombre fini de cas. Les cas $c = -1$ sont similaires aux cas $c = 1$, c'est pourquoi seuls ces derniers seront traités. Le coefficient b est obtenu dans chacun des cas par $ad - bc = 1$

. $a = 0$ $d = 0$ on a alors $z' = \frac{-1}{z}$.

Si $|z| > 1$ alors $|z'| < 1$ donc z' n'est pas dans \mathbb{M} .

Si $|z| = 1$ alors $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in [\frac{\Pi}{3}, \frac{\Pi}{2}[$ (Le cas $\theta = \frac{\Pi}{2}$ donne $z = z'$) on a alors $z' = -e^{i\theta} = e^{i\phi}$ où $\phi \in]\frac{\Pi}{2}, \frac{2\Pi}{3}]$ donc z' n'est pas dans \mathbb{M} .

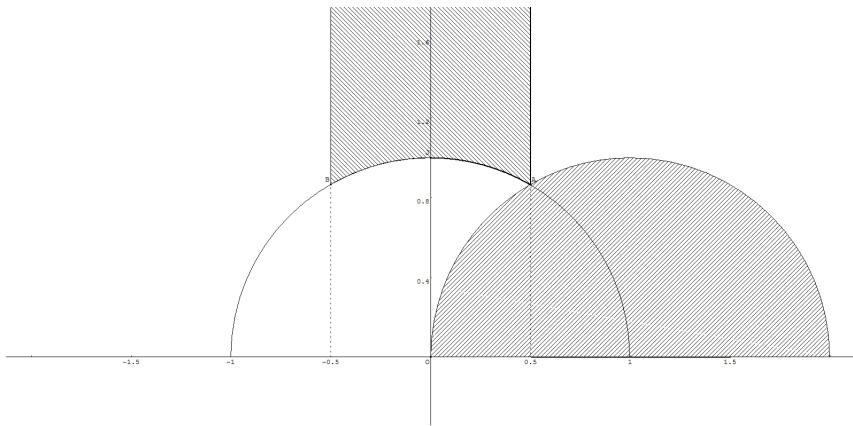
. $a = 0$ $d = -1$ on a $z' = \frac{-1}{z-1}$

Donc $|z'| = \frac{1}{|z-1|} \leq 1$. L'égalité est réalisée lorsque $|z-1| = 1$ c'est à dire quand $z = e^{\frac{i\Pi}{3}}$.

On a alors $z' = z$.

. $a = 1$ $d = 0$ on a $z' = \frac{z-1}{z} = 1 - \frac{1}{z}$. Comme $|z-1| \leq 1$ alors en traçant le demi-cercle de rayon 1 autour du point $(1,0)$ on observe que le seul point d'intersection entre ce demi-

cercle et \mathbb{M} est $e^{\frac{i\Pi}{3}}$ ce qui donne dans ce cas là l'égalité $z = z'$. . $a = 1$ $d = -1$ on a alors $z' = \frac{z-2}{z-1} = 1 - \frac{1}{z-1}$, ce qui nous ramène dans le cas précédent car $|z-1| \geq 1$.



□

Théorème 2.3. *L'union des images de l'arc $T = \{e^{i\alpha} \mid \frac{\Pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{\Pi}{2}\}$ sous l'action du groupe $PSL_2(\mathbb{Z})$ est un arbre, appelé arbre modulaire.*

Démonstration.

* $PSL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ d'ordre 2 dans $PSL_2(\mathbb{Z})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est d'ordre 3 dans $PSL_2(\mathbb{Z})$.

En effet on sait qu'il est engendré par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et de plus on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie sans peine que A a pour point fixe i et que B et ses puissances ont pour point fixe $e^{\frac{i\Pi}{3}}$. De plus d'après le théorème précédent on sait que deux images de cet arc ne peuvent s'intersecter qu'au niveau des extrémités.. On en déduit donc que T est connexe.

* Montrons que T n'est pas cyclique.

Par l'absurde supposons qu'il le soit. Il existe alors une région compacte K dans \mathbb{H}^2 créée par des images de T .

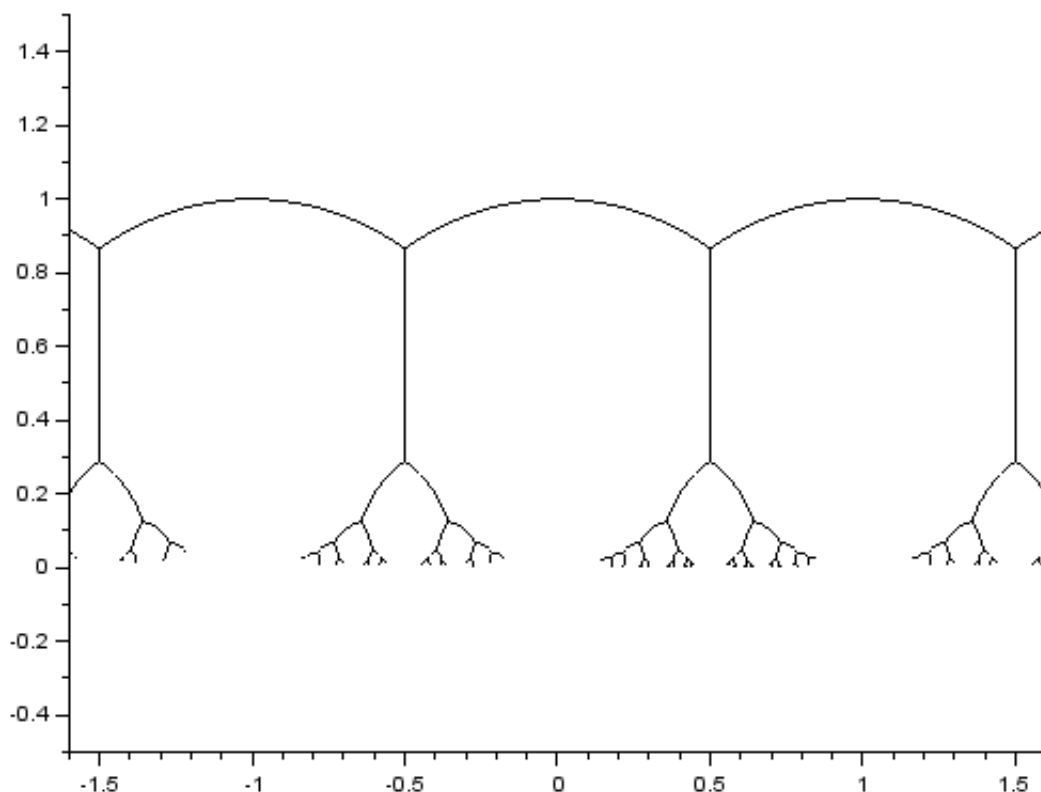
Soit w dans l'intérieur de K . Il existe w' dans \mathbb{M} et $Q \in PSL_2(\mathbb{Z})$ tels que $w = Qw'$. On considère alors la demi-droite verticale d'extrémité w' qui soit dans \mathbb{M} , on la note D' . Cette demi-droite a pour image (par n'importe quel élément de $PSL_2(\mathbb{Z})$) une autre demi-droite ou un arc de cercle convergeant vers un point de l'axe réel. Ainsi QD' est soit une demi-droite, soit un arc de cercle comme dit précédemment. Ainsi QD' coupe le compact K . On obtient donc un point qui est à la fois équivalent à w' qui est dans l'intérieur de \mathbb{M} et à un point y du bord de \mathbb{M} . Donc y et w' sont équivalents. Absurde.

Ainsi T n'est pas cyclique.

Donc T est un arbre. □

2.2 Visualisation

Le code utilisé pour programmer l'arbre modulaire est donné en annexe.



3 Pavages

On considèrera ici que des groupes de Coxeter (W, S) où S sera fini.

On notera par \mathbb{X}_ϵ^n les espaces de dimension n suivants

si $\epsilon = -1$ alors $\mathbb{X} = \mathbb{H}^2$

si $\epsilon = 0$ alors $\mathbb{X} = \mathbb{E}$ l'espace euclidien.

si $\epsilon = 1$ alors $\mathbb{X} = \mathbb{S}$ l'espace sphérique.

3.1 Théorie

Un groupe de Coxeter est un groupe engendré par des réflexions. C'est un couple (W, S) où W est un groupe et S est un ensemble d'éléments d'ordre 2 qui génèrent W . De plus il existe des relations entre les éléments de $S : \forall r_i, r_j \in S \exists m_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tels que

$$m_{ii} = 1$$

$$m_{ij} = m_{ji}$$

$m_{ij} = \infty$ signifie qu'il n'y a aucune relation entre les deux éléments.

Où m_{ij} correspond à l'ordre de la composition $r_i \circ r_j$

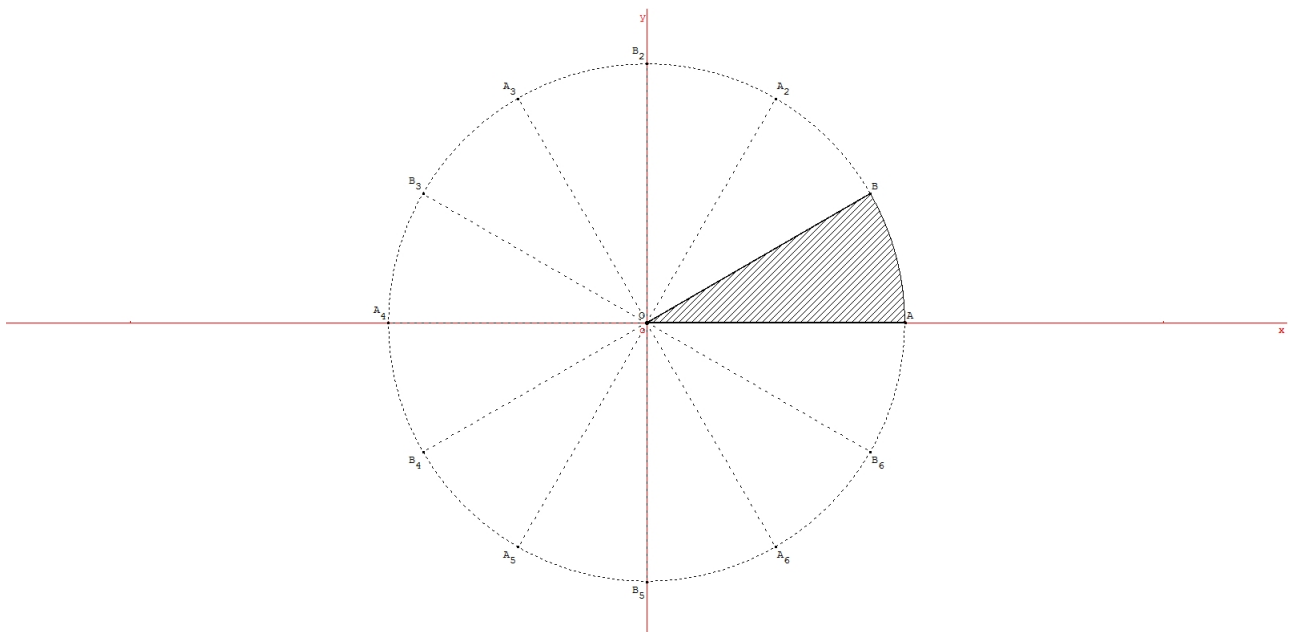
On notera pour un polygone P , le groupe de Coxeter associé aux réflexions créées par ses côtés (W, P) . Nous obtenons alors une multitude de réflexions formant un certain nombre de polygone P . On note cet espace $\mathbb{U}(W, P)$.

C'est un espace abstrait et notre but est de trouver quand est-ce que cet espace est homéomorphe à \mathbb{X}_ϵ^n . On obtiendra alors l'existence d'un pavage pour \mathbb{X}_ϵ^n .

L'exemple de la sphère de dimension 1 (ou du cône en dimension 2)

Notons I un arc de cercle de longueur $\frac{\Pi}{m}$ et r_1, r_2 les réflexions orthogonales de \mathbb{S}^1 sur les extrémités de I . On a alors clairement $m = m_{12}$ et notre arc de cercle pave bien le cercle en entier.

L'image suivante a été réalisé avec un angle de $\frac{\Pi}{6}$



Passons maintenant au principal théorème. La preuve de celui-ci étant hors portée, nous ne prouverons que ce que nous utiliserons plus tard c'est à dire la dimension 2.

Théorème 3.1. *Soit P^n un polytope convexe simple dans \mathbb{X}_ϵ^n , $n \geq 2$. On note F_i ses faces. On suppose que P^n a des angles diédraux de la forme $\frac{\Pi}{m_{ij}}$ où $m_{ij} \in \mathbb{N}$ si les faces F_i et F_j s'intersecte, sinon $m_{ij} = \infty$. Soit (W, P^n) le groupe de Coxeter associé à P^n (on a donc les m_{ij} qui correspondent bien à ceux des angles). Alors $i : \mathbb{U}(W, P^n) \rightarrow \mathbb{X}_\epsilon^n$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence et il faut distinguer plusieurs étapes. La première prouver le résultat pour la sphère de dimension n , puis le prouver pour un polytope particulier dans l'espace choisi : le cône en dimension $n + 1$, puis le prouver pour n'importe quel polytope dans l'espace choisi.

L'idée qu'il faut retenir et que la preuve se fait au niveau local, et ensuite il y a un passage du local au global.

On a déjà prouver le cas de la sphère en dimension 1 et donc du cône en dimension 2.

Soit P un polygone (polytope de dimension 2).

Montrons que $\mathbb{U}(W, P)$ a une \mathbb{X}_ϵ^2 structure, c'est à dire que i est une isométrie locale. Pour cela il faut montrer que pour tout x dans P il existe un voisinage de x (vu dans $\mathbb{U}(W, P)$) qui soit homéomorphe à une boule ouvert de \mathbb{X}_ϵ^2

Soit $x \in P$, on note $S(x)$ l'ensemble des réflexions des arêtes de P qui contiennent x . On a alors que $(W_{S(x)}, S(x))$ est un système de Coxeter. Il existe alors 3 cas en fonction de la position de x : dans P , sur une arête ou sur un sommet.

Le dernier cas étant le plus compliqué on ne traitera que celui-ci.

On note r_x la plus petite distance de x à une arête qui ne contient pas x .

On considère C_x un voisinage conique de ouvert de rayon r_x autour de x dans P . Ainsi il existe un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{U}(W, P)$ qui soit de la forme $\mathbb{U}(W_{S(x)}, C_x)$. Or comme C_x est un cône de dimension 2 avec un angle diédral de la forme $\frac{Pi}{m}$ on peut utiliser le théorème.

Donc i envoie de manière homéomorphe $\mathbb{U}(W_{S(x)}, C_x)$ sur une boule ouverte de \mathbb{X}_ϵ^2 .

Nous avons donc montré que $\mathbb{U}(W, P)$ a une \mathbb{X}_ϵ^2 structure, donc que i est une isométrie locale.

On considère maintenant que l'on est dans \mathbb{S}^2 , car c'est le cas que l'on va utiliser par la suite.

Montrons que $i : \mathbb{U}(W, P) \rightarrow \mathbb{S}^2$ est bijective.

On admet que i est uniformément une isométrie local.

Pour le caractère surjectif, montrons que $i(\mathbb{U}(W, P))$ est à la fois ouvert et fermé, on sait qu'il est non vide. Car le seul ouvert et fermé non vide de \mathbb{S}^2 est lui même.

Montrons que c'est un ouvert :

Soit $u \in i(\mathbb{U}(W, P))$. Ainsi il existe x dans $\mathbb{U}(W, P)$ tel que $i(x) = u$.

Comme $\mathbb{U}(W, P)$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathbb{U}(W, P)$. D'où u est dans $i(B(x, r))$.

De plus comme i est une isométrie locale, quitte à réduire r , $i(B(x, r))$ est un ouvert.

Donc il existe ρ tel que $B(u, \rho) \subset i(\mathbb{U}(W, P))$.

Donc $i(\mathbb{U}(W, P))$ est un ouvert.

Montrons que c'est un fermé.

Soit $(y_n)_n$ une suite de $i(\mathbb{U}(W, P))$ telle que $y_n \rightarrow y_\infty$.

$\exists \epsilon, \exists n_0$ tels que $\{y_n, n > n_0\} \subset B(y_{n_0}, \frac{\epsilon}{2})$

$\exists x_{n_0}$ tel que $y_{n_0} = i(x_{n_0})$. Comme i est uniformément une isométrie locale $\exists V_\epsilon(x_{n_0})$ (contenant une boule de centre x_{n_0} de rayon ϵ) tel que $i|_{V_\epsilon} \rightarrow i(V_\epsilon)$ est une isométrie. Son image est donc une boule ouverte de centre y_{n_0} de rayon ϵ . Cette boule étant incluse dans $i(\mathbb{U}(W, P))$ et y_∞ étant à moins strictement de ϵ de y_{n_0} on a donc $y_\infty \in i(\mathbb{U}(W, P))$.

Donc $i(\mathbb{U}(W, P))$ est un fermé.

Ainsi $i(\mathbb{U}(W, P)) = \mathbb{S}^2$.

Donc i est surjective.

Montrons que i est injective.

Soient $u, v \in \mathbb{U}(W, P)$, $y \in \mathbb{S}^2$ tels que $i(u) = i(v) = y$.

Par l'absurde supposons $u \neq v$.

On a alors la distance de u à v qui est non nulle, on la note R .

Soit γ un chemin allant de u à v ($\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{U}(W, P)$ C^1 par morceau).

Ainsi $i \circ \gamma$ est une courbe C^1 par morceau tel que $i \circ \gamma(0) = i \circ \gamma(1)$ C'est donc un lacet. Sans perdre de généralité on peut le supposer simple.

Comme \mathbb{S}^2 est homotope, on peut avec une homotopie ϕ réduire ce lacet en un lacet de longueur comprise entre $[\frac{R}{3}, \frac{R}{4}]$.

Ainsi $i^{-1} \circ \phi \circ i \circ \gamma$ est un chemin Γ de u à v dans $\mathbb{U}(W, P)$.

On a i conserve les distances (isométrie local) et $\phi \circ i \circ \gamma$ est de longueur strictement plus petite que R . Ainsi Γ est un chemin allant de u à v de longueur strictement plus petite que R .

Absurde.

Donc i est injective.

Donc i est bijective.

Ainsi i est un homéomorphisme de $\mathbb{U}(W, P)$ dans \mathbb{S}^2 .

□

Puisque les pavages que nous allons créer se situent sur \mathbb{S}^2 il nous faut trouver les polygones qui existent. Pour cela on admettra le théorème de Gauss-Bonnet :

Théorème 3.2. Dans \mathbb{X}_ϵ^n soit P^2 un m -gone. On note α_i ses angles
Alors

$$\epsilon \text{Aire}(P^2) + \sum_{i=1}^m (\Pi - \alpha_i) = 2\Pi$$

Comme on se place dans \mathbb{S}^2 alors $\epsilon = 1$. Donc pour un m -gone de la sphère, on a

$$\sum (\alpha_i) > (m - 2)\Pi.$$

De plus on va supposer (pour pouvoir rentrer dans le cadre du théorème) que tous les angles sont plus petits que $\frac{\Pi}{2}$. Ainsi :

$$\sum \frac{\Pi}{2} > (m - 2)\Pi \text{ donc } (\frac{m}{2} - 2)\Pi < 0 \text{ D'où } m < 4.$$

Ainsi s'il existe des polygones (avec la condition sur les angles) cela ne pourra être que des

triangles.

$$\text{Donc } \frac{\Pi}{m_1} + \frac{\Pi}{m_2} + \frac{\Pi}{m_3} > \Pi.$$

Or cette relation n'est vérifiée que pour peu d'angles.

En effet seuls les couples suivants fonctionnent :

- . $\{(2, 2, n, n \in \mathbb{N})\}$
- . $(2, 3, 3)$
- . $(2, 3, 4)$
- . $(2, 3, 5)$

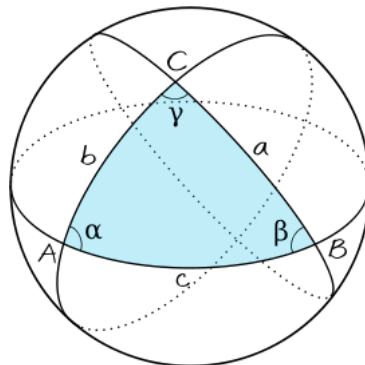
Remarque : Pour ce qui est de l'espace hyperbolique de dimension 2, la condition sur la somme des angles est $\sum(\alpha_i) < (m-2)\Pi$. On obtient donc que pour n'importe quel affectation d'angles la relation est vérifiée. Donc dans \mathbb{H}^2 on pourra toujours tracer le pavage de l'espace à partir d'un polygone vérifiant la relation sur les angles.

3.2 Pavages de la sphère

Pour modéliser les pavages des trois derniers triangles cités précédemment, le logiciel Géoplan-Géospace est assez bien adaptée.

La démarche pour tous les cas est la suivantes :

- . Créer le triangle de base :



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/14/Triangle_sphrique.svg/320px-Triangle_sphrique.svg.png

On utilise la propriété suivante sur les cosinus en géométrie sphérique :

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(c)$$

En effet on trouve alors $\cos(c)$ et $\cos(b)$ qui seront les côtes de nos points B et C. On prend ainsi :

$$A = (0, 0, 1)$$

$$B = (\sin(c), 0, \cos(c))$$

$$C = (\sin(b), 0, \cos(b))$$

Après avoir construit ce premier triangle il suffit de faire suffisamment de réflexions pour couvrir toute la sphère.

On calcule d'abord un vecteur normal N au plan de réflexion, puis on le normalise ce qui nous donne un autre vecteur n . On note le point de départ P . On a alors le point réfléchi P' de la

manière suivante : $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 2 \langle \overrightarrow{OA}, \vec{n} \rangle \vec{n}$.

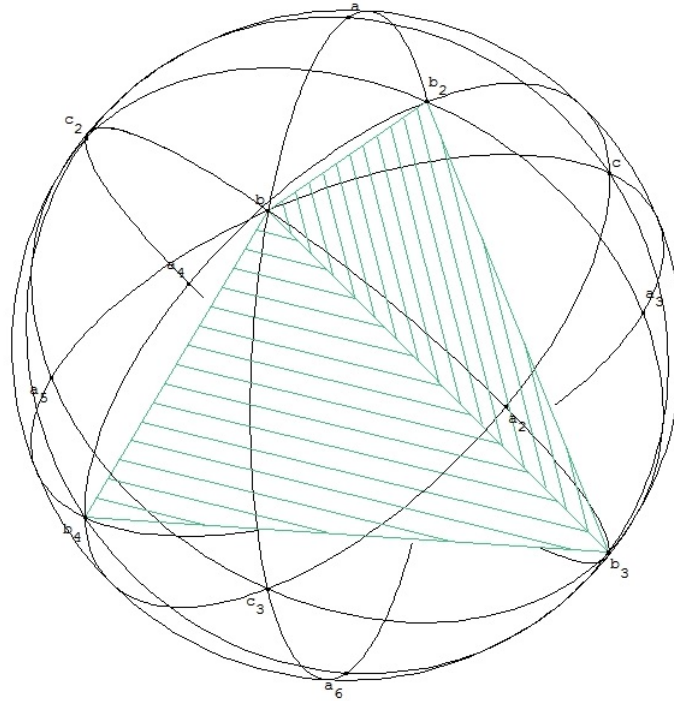
Les calculs se font très bien pour les deux premiers pavages (associés à $(2, 3, 3)$ et $(2, 3, 4)$). Par contre pour le dernier pavage (associé à $(2, 3, 5)$), les calculs ne donne rien de facile mais la modélisation est toujours faisable approximativement.

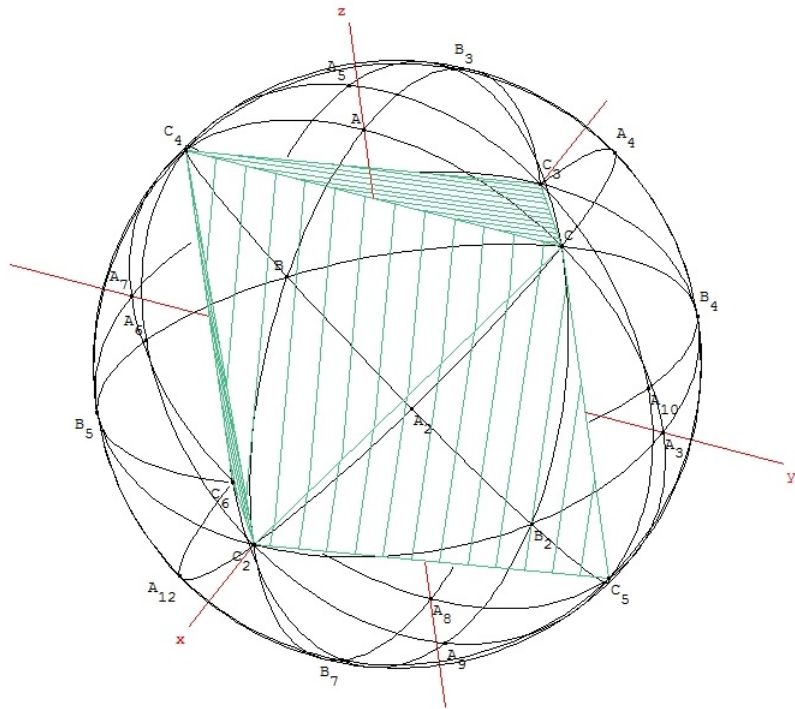
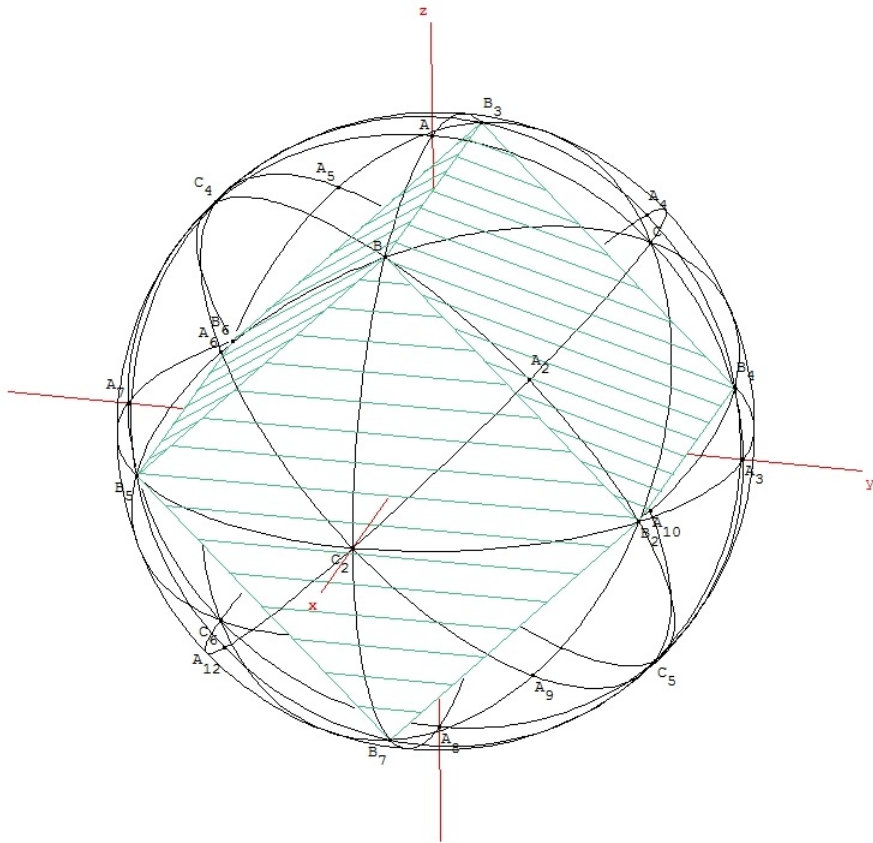
Pour mieux les visualiser en 2D je fais apparaître les polyèdres associées à l'intérieur de la sphère. En effet en choisissant comme sommets les points B ou C on obtient un polyèdre ou son dual (plus précisément on obtient les solides platoniciens) et ainsi on obtient la visualisation de leur groupe d'isométrie.

Pour le triangle de base associé à $(2, 3, 3)$ c'est le tétraèdre.

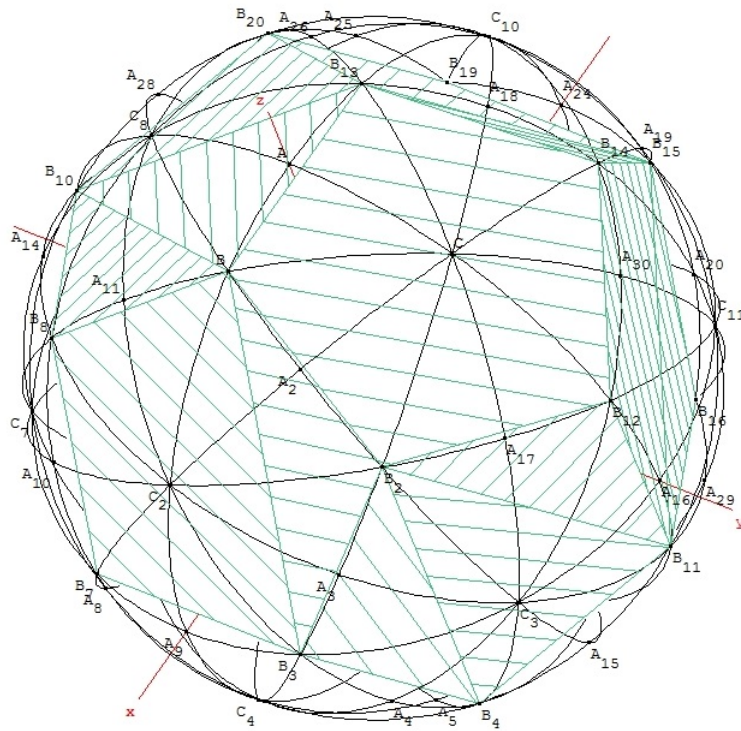
Pour le triangle de base associé à $(2, 3, 4)$ c'est le cube ou son dual l'octaèdre.

Pour le triangle de base associé à $(2, 3, 5)$ c'est le dodécaèdre ou son dual l'icosaèdre.

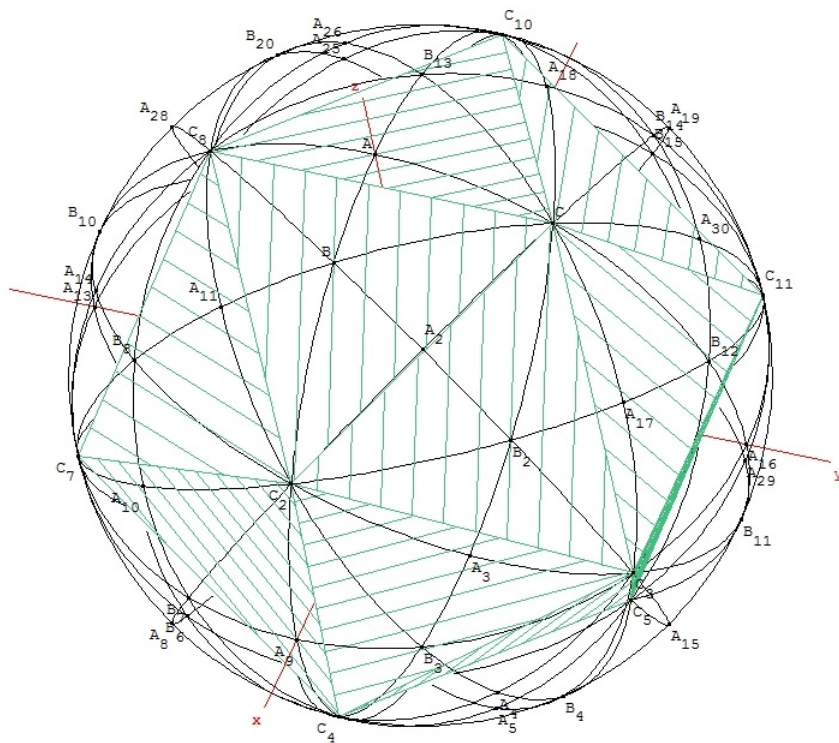




$C_3: (0.52572, 0.85065, -0.00002)$



$C_3: (0.52572, 0.85065, -0.00002)$



4 Annexes

4.1 Arbre modulaire

Pour créer l'arbre modulaire, je prend les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il faut tout d'abord décider combien d'images on veut afficher, c'est le nombre N. (n est la taille de N en base 3)

Il faut aussi se donner un ordre compréhensible et le plus optimale possible pour créer les matrices et éviter d'avoir des doublons. Pour cela je suis parti sur une idée décomposition en base 3 modifiée. En effet comme A est d'ordre 3 cela correspond bien. Seulement B est d'ordre 2. J'ai donc utilisé un tableau de taille 2n qui distingue les cases paires et impaires.

Sur les cases paires il ne peut y avoir que 0,1 ou 2 : cela correspond à la puissance de la matrice A. Dans les cases impaires c'est les puissance de la matrices B il n'y a donc que 0 ou 1.

La particularité est lorsqu'une case impaire passe de 0 à 1, elle reste à 1 quoi qu'il arrive (pour éviter les doublons). Les premières matrices utilisées sont donc :

Id, A, A², B, AB, A²B, BA, ABA, A²BA, BA², ABA²...

Il faut donc une fonction pour récupérer la matrice à partir du tableau.

Après avoir récupérer la matrice il faut donc pouvoir afficher l'image de l'arc. Pour cela j'ai besoin de la fonction que j'ai nommé Arc.

Voici le code de la fonction base3 :

```
function n=base3(N)
    n=1
    while N>=3 then
        N=N/3
        n=n+1
    end
endfunction
```

Voici la fonction incrémentant mon tableau de 1 en 1 :

```
function v=sommation(u,n)
    v=zeros(1,n)
    v(1)=1
    for k=1 :n
        a=u(k)
        b=v(k)
        r=modulo(k,2)
        if r==1 then
            s=a+b
            if s<3 then
                v(k)=s
            else
                if (k+1)<=n then
                    if u(k+1)==0 then
                        v(k)=0
                        v(k+1)=1
                    else
                        if (k+2)<=n then
                            v(k)=0
                            v(k+2)=1
                            v(k+1)=1
                        else
                            v(k)=0
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
    if or([a==1,b==1]) then
        v(k)=1
    end
end
endfunction
```

Et voici celui pour générer les matrices :

```
function M=generer(V,n)
    A=[0,1;-1,1]
    B=[0,-1;1,0]
    C=[1,0;0,1]
    M=C
    for k=1 :n
        r=modulo(k,2)
        if r==1 then
            if V(k)==0 then
                M=M.C
            else
                if V(k)==1 then
                    M=M.A
                else
                    M=M.A.A
                end
            end
        end
        else
            if V(k)==0 then
                M=M.C
            else
                M=M.B
            end
        end
    end
endfunction
```

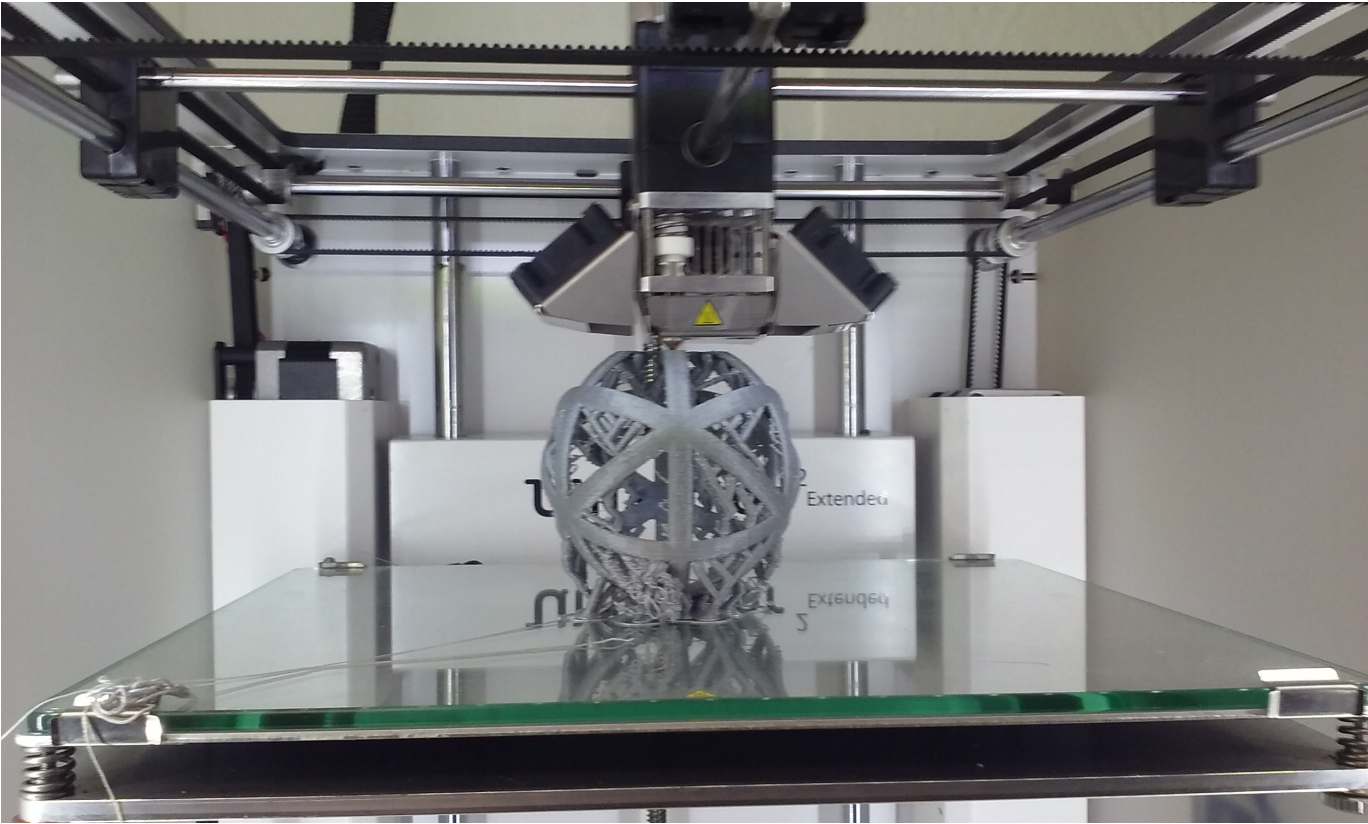
Pour tracer l'image de l'arc, je crée un certain nombre de points représenté par deux tableaux l'un pour la partie réelle et l'autre la partie imaginaire. J'ai donc besoin d'évaluer l'image Mz pour un certain nombre de z appartenant à l'arc.

```
function val=evaluer (M,z)
    val=[M(1,1)*z+M(1,2)]/[M(2,1)*z+M(2,2)]
endfunction
```

```
function [R,I]=Arc(M,Int,n)
    exec evaluer.sci;
    R=zeros(n,1)
    I=zeros(n,1)
    for k=1 :n
        z=evaluer(M,e(iπ.(Int(k)+1/3)))
        R(k)=real(z)
        I(k)=imag(z)
    end
endfunction
```


4.2 Modélisation 3D du pavage associé au tétraèdre

En cours de fabrication :



Produit final :



5 Bibliographie

The geometry and topology of coxeter groups de Michael W. Davis

Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann de Ricardo Sa Earp et Eric Toubiana

Article de Olivier Lafleur "Une décomposition intéressante d'une matrice de $GL_2(\mathbb{Q})$ "
https://www.usherbrooke.ca/mathematiques/fileadmin/sites/mathematiques/documents/Recherche/Publications/Rapports_de_recherche/rr63.pdf